

185.085 PS Wissenschaftliches Arbeiten, 2.0 Std.  
WS 2001/02

Thema: Logik(en) in der Informatik

Viktor Krammer, < 9826988 > E881  
26. November, 2001

---

## Framework für out-to-do und out-to-be Logik

**Abstract.** Der Artikel [AMW96] beschäftigt sich mit der Formalisierung der Deontischen Logik, die Logik des "Sollens und Erlaubtseins". Es wird gezeigt, daß eine Trennung zwischen obligatorischen Zuständen und Aktionen vorzunehmen ist.

Die Anderson-Reduktion ist eine Formalisierung von obligatorischen Zustandsbeschreibungen in Modal Logik mit Notwendigkeitsoperator, während die Meyer-Reduktion gleiches für Aktionen leistet. Die Autoren integrieren beides in eine S5-Typ Logik und diskutieren Eigenschaften, der so erhaltenen Logik.

### Literatur

[AMW96] P. d'Altan, J.-J.Ch. Meyer, R.J. Wieringa, An integrated framework for ought-to-be and ought-to-do constraints in Artificial Intelligence and Law, Volume 4, SS. 77, Kluwer Academic Publishers, 1996

### Links

Propositional Dynamic Logic (PDL)

<http://www.cwi.nl/~paulypdl/pdl.html>

Logic System Interrelationships

<http://www.cc.utah.edu/~nahaj/logic/structures/>

# Übersicht

- Anderson-Reduktion
- Meyer-Reduktion
  - Semantik von Aktionen
- Integration
- Eigenschaften / Theoreme

# Anderson-Reduktion

## Definition ADL (ought-to-be Logik)

$$O\varphi \equiv \Box(\neg\varphi \rightarrow V)$$

$$F\varphi \equiv \Box(\varphi \rightarrow V)$$

$$P\varphi \equiv \neg F\varphi \equiv \Diamond\varphi \wedge \neg V$$

$V$  def. als *Signal für Normübertretung (Violation)* anstatt als Sanktion

**Kripke Modell**  $M = \langle W, \pi, R, \models \rangle$

- $W =$  Menge der möglichen Welten
- $\pi : \Pi \times W \rightarrow \{1, 0\}$  Belegung der Variablen in den Welten
- $R : W \rightarrow \wp(W)$  Erreichbarkeitsrelation
- $\models \subseteq \{(w, \varphi) \mid w \in W \text{ und } \varphi \in \Pi\}$   
Wahrheitsrelation zw. Welten und Sätzen

## Kripke Modelle (Fortsetzung)

- $M, w \models \Box\varphi$ , falls für alle  $w' \in W$  mit  $wRw'$  gilt  $M, w' \models \varphi$
- $M \models \varphi$ , falls  $M, w \models \varphi$  f.a.  $w \in W$
- $\models \varphi$ , falls  $M \models \varphi$  f.a. Kripke Modelle  $M$

## Unterschiede ADL zu SDL

ADL (Typ KT) ist eine Erweiterung von SDL (Typ KD). Es gelten z.B. zusätzlich folgende Formeln:

- $O\varphi \rightarrow OO\varphi$
- $\Box(\Box\varphi \rightarrow O\varphi)$
- $\Box(O\varphi \rightarrow \Box O\varphi)$

# Meyer-Reduktion

für ought-to-do (dynamische) Logik bestehend aus

- $\Pi$  = Menge der AL-Variablen
- $\underline{A}$  = Menge der Aktionen

$[\alpha]\phi$  wird gelesen als “Die Ausführung der Aktion  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathcal{A}$ ) führt notwendigerweise in eine Welt, in der  $\phi$  gültig ist.”

## Definition

$$\begin{aligned}\hat{F}\alpha &\equiv [\alpha]V \\ \hat{P}\alpha &\equiv \neg\hat{F}\alpha \equiv \langle\alpha\rangle\neg V \\ \hat{O}\alpha &\equiv \hat{F}\bar{\alpha} \equiv [\bar{\alpha}]V\end{aligned}$$

## Semantik von Aktionen

jeder Aktionsname  $\underline{a} \in \underline{A}$  entspricht einer elementaren Aktion  $a \in \mathcal{A}$

Der Aktionsterm  $[[\alpha]]$  wird in zwei Schritten interpretiert

1. Step-Semantik  $[[\alpha]]_S$   
als *Step* von elementaren Aktionen
2. State-Übergangsemantik  $[[\alpha]]$   
als Angabe der Auswirkung von Aktionen

Ein Step  $S$  ist eine nicht leere Menge von elementaren Aktionen  $[a_1, \dots, a_n]$ , die simultan bei einem State-Übergang auftreten.

$$[[\underline{a}]]_S = \{S \subseteq \mathcal{A} \mid a \in S\}$$

## Negation und Wahl von Aktionen

$$[[\bar{\alpha}]]_S = STEPS \setminus [[\alpha]]$$

$$[[\alpha_1 + \alpha_2]]_S = [[\alpha_1]]_S \cup [[\alpha_2]]_S$$

## State-Übergangsemantik

Funktion  $eff : \mathcal{A} \rightarrow (W \rightarrow W)$

Was bedeutet  $eff(a)(w)$ ?

für einen Step  $S = [a_1, \dots, a_n]$  gilt

$$eff(S) = eff(a_1) \circ \dots \circ eff(a_n)$$

Ein Step  $S$  ist *kompatibel*, falls obiges für jede Permutation gilt.

$$eff(T)(w) = \{eff(S)(w) \mid S \in T \text{ kompatibel} \}$$

$$[[\alpha]](w) = eff([[ \alpha ] ]_S)(w)$$

alternativ

$$R_a(w, w') \Leftrightarrow w' \in [[\alpha]](w)$$

# Integration $PDeL^{AM}$

## Axiome

(K)	$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
(T)	$\Box\varphi \rightarrow \varphi$
(5)	$\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi$
(D)	$\Diamond\neg V$
(AK)	$[\alpha](\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ([\alpha]\varphi \rightarrow [\alpha]\psi)$
(MP)	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi$
(N)	$\varphi / \Box\varphi$
(AN)	$\varphi / [\alpha]\varphi$
(F)	$F\varphi \leftrightarrow \Box(\varphi \rightarrow V)$
(O)	$O\varphi \leftrightarrow \Box(\neg\varphi \rightarrow V)$
(P)	$P\varphi \leftrightarrow \neg F\varphi$
( $\hat{F}$ )	$\hat{F}\alpha \leftrightarrow [\alpha]V$
( $\hat{O}$ )	$\hat{O}\alpha \leftrightarrow [\bar{\alpha}]V$
( $\hat{P}$ )	$\hat{P}\alpha \leftrightarrow \neg\hat{F}\alpha$
( $\Box[\alpha]$ )	$\Box\varphi \rightarrow [\alpha]\varphi$
( $[\alpha]\Box$ )	$\neg[\alpha]\perp \wedge [\alpha]\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$

**Semantik**  $M = \langle A, W, \pi, [[\alpha]], \models, opt \rangle$

$[[\alpha]] : A \times W \rightarrow \wp(W)$  assoziiert Aktionen und Welten mit den Welten, die durch die ausgeführten Aktionen erreicht werden

$opt \subseteq W$  Menge optimaler Welten ( $w \models \neg V$ )

## Semantik (Fortsetzung)

$M, w \models \varphi$  ist induktiv definiert

$M, w \models \dots$

$p$	$\Leftrightarrow$	$\pi(p, w) = 1$
$\neg\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\text{not}(M, w \models \varphi)$
$\varphi \wedge \psi$	$\Leftrightarrow$	$M, w \models \varphi$ und $M, w \models \psi$
$[\alpha]\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\forall w'[w' \in [[\alpha]](w) \Rightarrow M, w' \models \varphi]$
$\langle\alpha\rangle\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\exists w'[w' \in [[\alpha]](w) \wedge M, w' \models \varphi]$
$V$	$\Leftrightarrow$	$w \notin \text{opt}$
$\Box\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\forall w'[w' \in W \Rightarrow M, w' \models \varphi]$

## Eigenschaften von $PDeL^{AM}$

$\vdash \hat{F}(\alpha_1; \alpha_2) \leftrightarrow [\alpha_1]\hat{F}(\alpha_2)$
$\vdash F(\varphi_1) \wedge F(\varphi_2) \leftrightarrow F(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
$\vdash \hat{F}(\alpha_1) \wedge \hat{F}(\alpha_2) \leftrightarrow \hat{F}(\alpha_1 + \alpha_2)$
$\vdash F(\varphi_1) \vee F(\varphi_2) \rightarrow F(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
$\vdash \hat{F}(\alpha_1) \vee \hat{F}(\alpha_2) \rightarrow \hat{F}(\alpha_1 \& \alpha_2)$
$\vdash \hat{O}(\alpha_1; \alpha_2) \leftrightarrow \hat{O}(\alpha_1) \wedge [\alpha_1]\hat{O}(\alpha_2)$
$\vdash O(\varphi_1) \vee O(\varphi_2) \rightarrow O(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
$\vdash \hat{O}(\alpha_1) \vee \hat{O}(\alpha_2) \rightarrow \hat{O}(\alpha_1 + \alpha_2)$
$\vdash O(\varphi_1) \wedge O(\varphi_2) \leftrightarrow O(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
$\vdash \hat{O}(\alpha_1) \wedge \hat{O}(\alpha_2) \leftrightarrow \hat{O}(\alpha_1 \& \alpha_2)$
$\vdash O(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (O\varphi \rightarrow O\psi)$

## Paradoxon des bamherzigen Samariters

$$\vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \Box(O\varphi \rightarrow O\psi)$$

$$(\text{bzw. } \varphi \rightarrow \psi \vdash O\varphi \rightarrow O\psi)$$

entschärft, da  $\varphi$  Zustände und keine Aktionen sind

## Weitere Theoreme

$$\vdash O\varphi \rightarrow OO\varphi$$

$$\nVdash \hat{O}\alpha \rightarrow O\hat{O}(\alpha) \text{ aber } \hat{O}\alpha \vdash O(\hat{O}(\alpha))$$

$$\vdash \Box\varphi \rightarrow O\varphi$$

$$\vdash O\varphi \rightarrow \Box O\varphi \text{ bzw. } \nVdash \hat{O}\alpha \rightarrow \Box \hat{O}\alpha$$

$$\vdash O\varphi \rightarrow \neg O\neg\varphi \text{ und } \vdash O\varphi \rightarrow P\varphi$$

ought-to-do Varianten existieren nicht

$$\vdash \neg O\varphi \rightarrow O\neg O\varphi \text{ (gilt wegen (5))}$$

ought-to-do Variante existiert nicht